OPCIÓN A

A.1.-Considerar el sistema lineal de ecuaciones en **x , y** y **z** $\begin{cases} x+3y+5z=5 \\ mx+2z=0 \\ my-z=m \end{cases}$

a) Determinar los valores del parámetro **m** para los que el sistema tiene solución única. Calcula dicha solución para **m = 1**
b) Determinar los valores del parámetro **m** para los que el sistema tiene infinitas soluciones.
c) Estudiar si existe algún valor de **m** para el cual el sistema no tiene solución

$a)$

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix}=5m^2-2m+3m=5m^2+m \Rightarrow Si\ A=0 \Rightarrow 5m^2+m=0 \Rightarrow m(5m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

$$\forall x \in \Re - \left\{-\frac{1}{5}\ , 0\right\} \Rightarrow rang(A)=3 \Rightarrow Sistema\ Compatible$$

$Cuando\ m=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow -6z=-2 \Rightarrow z=\frac{1}{3}$$

$$-3y-3\cdot\frac{1}{3}=-5 \Rightarrow -3y=-5+1 \Rightarrow y=\frac{4}{3} \Rightarrow x+3\cdot\frac{4}{3}+5\cdot\frac{1}{3}=5 \Rightarrow x=5-4-\frac{5}{3}=-\frac{2}{3}$$

$$Solución\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$b)$

$Cuando\ m=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

$$z=0 \Rightarrow x+3y+5.0=5 \Rightarrow x=5-3y \Rightarrow Solución(5-3\lambda\ , \lambda\ ,\ 0)$$

$c)$

$Cuando\ m=-\dfrac{1}{5}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & -1 & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 \\ -1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 15 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 15 & 5 \\ 0 & -3 & -15 & -3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$Sistema\ Incompatible$

A.2.- Calcular

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^x$

$a)$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}=\frac{\sqrt{3^2-5}-2}{3-3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x^2-5}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5-4}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{\sqrt{x^2-5}+2}=\frac{3+3}{\sqrt{3^2-5}+2}=\frac{6}{\sqrt{4}+2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

$b)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x=1^\infty=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x^2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x^2}\right)^{x^2}\right]^{x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{1}{x}}=e^0=1$$

A.3.- Sea $F(x)=\int_1^{x^2} \ln t\, dt$ con $x \geq 1$

Calcular **F’(e)**. ¿Es **F’’(x)** una función constante?. Justificar la respuesta

$$F(x)=\int_1^{x^2} \ln t\, dt = \left[t \ln t\right]_1^{x^2} - \int_1^{x^2} t \cdot \frac{dt}{t} = \left(x^2 \ln x^2 - 1.\ln 1\right) - \int_1^{x^2} dt = x^2 \ln x^2 - 1.0 - \left[t\right]_1^{x^2} = x^2 \ln x^2 - x^2 + 1$$

$$\begin{cases} \ln t = u \Rightarrow du = \frac{1}{t}\, dt \\ dt = dv \Rightarrow v = \int dt = t \end{cases}$$

$$F'(x) = 2x \ln x^2 + \frac{1}{x^2} \cdot 2x \cdot x^2 - 2x = 2x \ln x^2 + 2x - 2x = 2x \ln x^2 \Rightarrow F'(e) = 2e \ln e^2 = 2e.2.\ln e = 4e$$

$$F''(x) = 2\left(1.\ln x^2 + \frac{1}{x^2} \cdot 2x \cdot x\right) = 2\left(\ln x^2 + 2\right) \Rightarrow \text{No es una función constante}$$

A.4.- Escribir las ecuaciones implícitas de una recta con la dirección del vector **(1 , -1 , 0)** y que pasa por **P’**, siendo **P’** el simétrico de **P = (0 , - 2 , 0)** respecto al plano $\pi \equiv x + 3y + z = 5$

Se trazará por P una perpendicular r al plano dado, para ello utilizaremos su vector director, que cortará a este en el punto R punto medio entre P y P’

$$\overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_r} = (1\,,\,3\,,\,1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 0 + \lambda = \lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 0 + \lambda = \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda + 3\cdot(-2 + 3\lambda) + \lambda = 5 \Rightarrow 2\lambda - 6 + 9\lambda = 5 \Rightarrow 11\lambda = 11 \Rightarrow \lambda =$$

$$R\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 3.1 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow R(1\,,\,1\,,\,1) \Rightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{0 + x_{P'}}{2} \Rightarrow x_{P'} = 2 \\ 1 = \dfrac{-2 + y_{P'}}{2} \Rightarrow x_{P'} = 2 + 2 = 4 \Rightarrow P'(2\,,\,4\,,\,2) \Rightarrow \\ 1 = \dfrac{0 + z_{P'}}{2} \Rightarrow z_{P'} = 2 \end{cases}$$

$$s \equiv x - 2 = \frac{y - 4}{-1} = \frac{z - 2}{0}$$

OPCIÓN B

B.1. Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 euros y un total almacenado de 2000 euros. Si el número total de billetes de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20, averiguar cuantos billetes de cada tipo hay.

Llamando D al número de billetes de 10€ ; V a los de 20€ y C a los de 50€

$$\begin{cases} D+V+C=95 \\ 10D+20V+50C=2000 \\ D=2V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D+V+C=95 \\ D+2V+5C=200 \\ D-2V=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 95 \\ 1 & 2 & 5 & 200 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 95 \\ 0 & 1 & 4 & 105 \\ 0 & -3 & -1 & -95 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 95 \\ 0 & 1 & 4 & 105 \\ 0 & 0 & 11 & 220 \end{array}\right) \Rightarrow 11C=220 \Rightarrow C=20 \Rightarrow V+4.20=105 \Rightarrow$$

$$V=25 \Rightarrow D+25+20=95 \Rightarrow D=50 \Rightarrow Solución(50\ ,\ 25\ ,\ 20)$$

B.2.Sea la función $f:\Re \to \Re$ definida por $f(x)=\frac{(x+2)^2}{x+1}$

a) Calcular su dominio

b) Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

c) Analizar sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y determinar las que existen

$a)$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow f(-1)=\frac{(-1+2)^2}{-1+1}=\frac{1}{0}\Rightarrow$$

$$Dom(f)=\forall x\in\Re-\{-1\}$$

$b)$

$$f'(x)=\frac{2.(x+2)(x+1)-(x+2)^2}{(x+1)^2}=\frac{2.(x^2+3x+2)-(x^2+4x+4)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\frac{(x+2)x}{(x+1)^2}$$

$$Crecimiento \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow \frac{(x+2)x}{(x+1)^2}>0 \Rightarrow \begin{cases} x>0 \Rightarrow \forall \in \Re / x>0 \\ x+2>0 \Rightarrow x>-2 \Rightarrow \forall \in \Re / x>-2 \\ (x+1)^2>0 \Rightarrow \forall \in \Re \end{cases}$$

	$-\infty$ … **-2**	**-2** … **0**	**0** … ∞
x > - 2	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 0	**(-)**	**(-)**	**(+)**
(x + 1)^2 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
Resultado operación	**(+)** **f'(x) > 0**	**(-)** **f'(x) < 0**	**(+)** **f'(x) > 0**

Crecimiento $\forall x\in\Re/(x<-2)\cup(x>0)$

Decrecimiento $\forall x\in\Re/-2<x<0$

$c)$

Asíntotas verticales.(indicadas en a)

$$x=-1\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{(x+2)^2}{x+1}=\frac{1}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+}\frac{(x+2)^2}{x+1}=\frac{1}{0^+}=\infty\end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+4}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+0+0}{0+0}=\frac{1}{0}$$

$\nexists$(*No existe*) *asíntota horizontal cuando* $x\to\infty$

Problema B2 (Continuación)

c)Continuación

Asíntotas horizontales (Continuación)

$$y=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2)^2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-x)^2+4(-x)+4}{(-x)+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4}{-x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{-\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1-0+0}{-0+0}=\frac{1}{0}$$

$\nexists$(*No existe*) *asíntota horizontal cuando* $x\to-\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(x+2)^2}{x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+4}{(x+1)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+4}{x^2+x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1+0+0}{1+0}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x+2)^2}{x+1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+4-(x^2+x)}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+4-x^2-x}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x}+\frac{4}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{3+0}{1+0}=3$$

Asíntota obicua $\Rightarrow y=x+3$ *cuando* $x\to\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{(x+2)^2}{x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4}{(-x+1)(-x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4}{x^2-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1-0+0}{1-0}=1$$

Problema B2 (Continuación)

$c)$*Continuación*

Asíntotas oblicuas $(Continuación)$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{(x+2)^2}{x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4}{(-x+1)(-x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4}{x^2-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1-0+0}{1-0}=1$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{(x+2)^2}{x+1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4-(x^2-x)}{-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4-x^2+x}{-x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+4}{-x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{3x}{x}+\frac{4}{x}}{-\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3+\frac{4}{x}}{-1+\frac{1}{x}}=\frac{-3+0}{-1+0}=3$$

Asíntota obicua $\Rightarrow y=x+3$ *cuando* $x\to-\infty$

B.3.- Calcular $\int_{\ln e}^{e} |\ln x| \, dx$

$\ln x > 0 \Rightarrow x > e^0 \Rightarrow x > 1$

$$\int_1^e |\ln x| \, dx = \int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} = (e \ln e - 1 \ln 1) - \int dx = (e.1 - 1.0) - [x]_1^e = e - (e-1) = 1$$

$$\begin{cases} \ln x = u \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = du \\ dx = dv \Rightarrow v = \int dx = x \end{cases}$$

B.4.-

a) Las componentes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en una cierta base de V_3 son:

$\vec{u}=(2\ ,0\ ,-1),\ \vec{v}=(-3\ ,1\ ,2)\ y\ \vec{w}=(4\ ,-2\ ,7)$

Hallar, en esa misma base las componentes del vector $2\vec{u}-\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}$

$$2\vec{u}-\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}=2.(2\ ,0\ ,-1)-(-3\ ,1\ ,2)+\frac{1}{3}\cdot(4\ ,-2\ ,7)=\left(4+3+\frac{4}{3}\ ,0-1-\frac{2}{3}\ ,-2-2+\frac{7}{3}\right)$$

$$2\vec{u}-\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}=\left(\frac{25}{3}\ ,-\frac{5}{3}\ ,\frac{7}{3}\right)$$

b) Determinar la posición relativa de las siguientes rectas:

$$.\,r_1:\begin{cases}7x+5y-7z-12=0\\ 2x+3z+11=0\end{cases}\qquad r_2:\begin{cases}5x-5y-z-16=0\\ 3x-2y-7=0\end{cases}$$

Si los vectores directores de la rectas son proporcionales son paralelas y si tiene n punto común son la misma recta. De no serlo si se tienen un punto común se cortan, sino son rectas que se cruzan

$$r_1:\begin{cases}7x+5y-7z-12=0\\ 2x+3z+11=0\end{cases}\qquad r_2:\begin{cases}5x-5y-z-16=0\\ 3x-2y-7=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{-11-3z}{2}\Rightarrow 7\cdot\left(\dfrac{-11-3z}{2}\right)+5y=12+7z\Rightarrow 5y=\dfrac{24+14z+77+21z}{2}\Rightarrow y=\dfrac{101+35z}{10}\\ y=\dfrac{3x-7}{2}\Rightarrow 5x-5\cdot\left(\dfrac{3x-7}{2}\right)-16=z\Rightarrow z=\dfrac{10x-15x+35-32}{2}\Rightarrow z=\dfrac{-5x+3}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}r_1:\begin{cases}x=-\dfrac{11}{2}-\dfrac{3}{2}\lambda\\ y=\dfrac{101}{10}+\dfrac{7}{2}\lambda\Rightarrow v_{r_1}=\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{2},1\right)\equiv(-3,7,2)\\ z=\lambda\end{cases}\\ r_2:\begin{cases}x=\mu\\ y=-\dfrac{7}{2}+\dfrac{3}{2}\mu\Rightarrow v_{r_1}=\left(1,\dfrac{3}{2},-\dfrac{5}{2}\right)\equiv(2,3,-5)\\ z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}\mu\end{cases}\end{cases}\Rightarrow\frac{-3}{2}\neq\frac{7}{3}\Rightarrow \textit{No son coincidentes ni paralelas}$$

$$\begin{cases}-\dfrac{11}{2}-\dfrac{3}{2}\lambda=\mu\\ \dfrac{101}{10}+\dfrac{7}{2}\lambda=-\dfrac{7}{2}+\dfrac{3}{2}\mu\\ \lambda=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}\mu\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\mu+3\lambda=-11\\ 15\mu-35\lambda=136\\ 5\mu+2\lambda=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}10\mu+15\lambda=-55\\ -10\mu-4\lambda=-6\end{cases}\Rightarrow 11\lambda=-61\Rightarrow\lambda=-\frac{61}{11}$$

Continuación problema B.4 apartado b)

Veamos si se cortan ose cruzan

$b)Continuación$

$$\begin{cases} -\frac{11}{2}-\frac{3}{2}\lambda=\mu \\ \frac{101}{10}+\frac{7}{2}\lambda=-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\mu \\ \lambda=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\mu+3\lambda=-11 \\ 15\mu-35\lambda=136 \\ 5\mu+2\lambda=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10\mu+15\lambda=-55 \\ -10\mu-4\lambda=-6 \end{cases} \Rightarrow 11\lambda=-61 \Rightarrow \lambda=-\frac{61}{11} \Rightarrow$$

$$5\mu+2\cdot\left(-\frac{61}{11}\right)=3 \Rightarrow 5\mu=\frac{122+33}{11} \Rightarrow \mu=\frac{155}{11.5}=\frac{31}{11} \Rightarrow$$

$$15\cdot\frac{31}{11}-35\cdot\left(-\frac{61}{11}\right)=\frac{15.31+61.35}{11}=\frac{465+2135}{11}=\frac{2600}{11}\neq 136 \Rightarrow Se\ cruzan$$